無理数の連分数を使った近似

青木 昌雄
aoki.masao@h.hokkyodai.ac.jp

2016 年 7 月 14 日

連分数近似

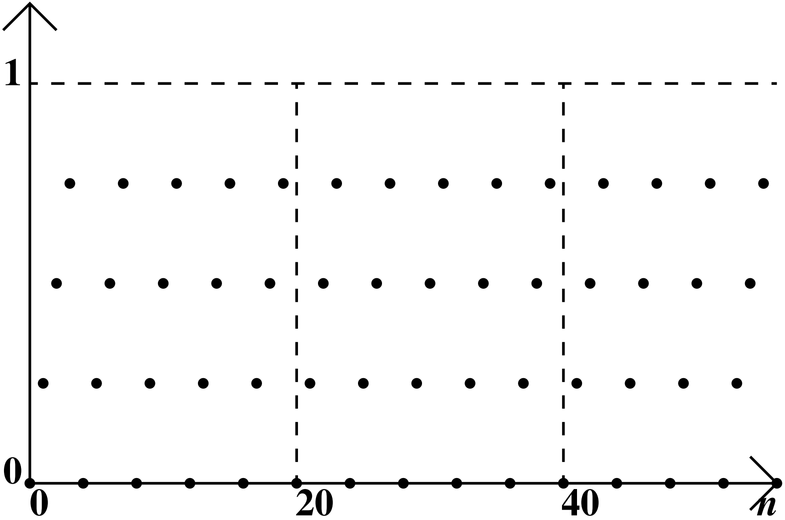
実数 x の連分数展開を使うと、x を近似する有理数を求めることができた。

x が有理数により近似されている様子を、nx の小数部分

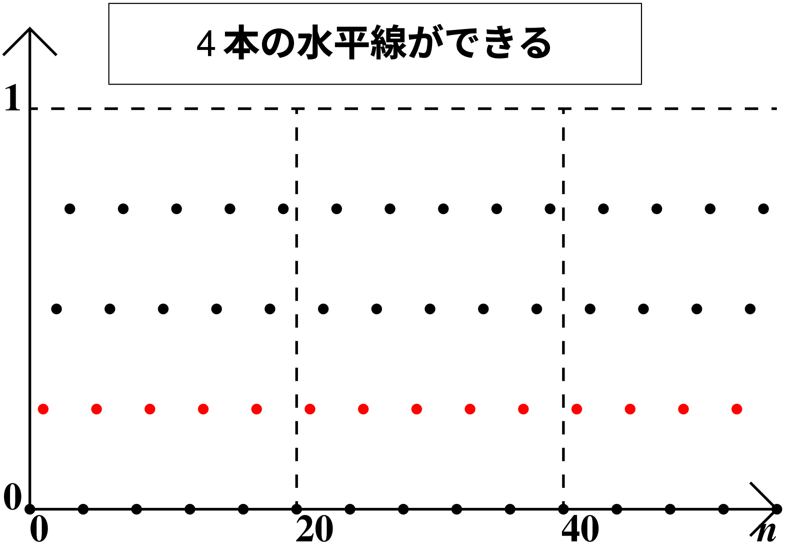
$$nx - [nx] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

に注目して図示する。

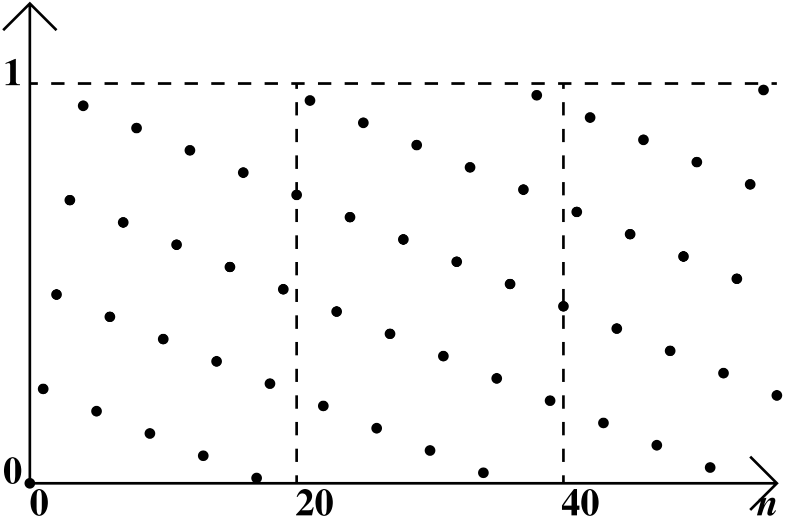
nx の小数部分 ($x = 9/4$)



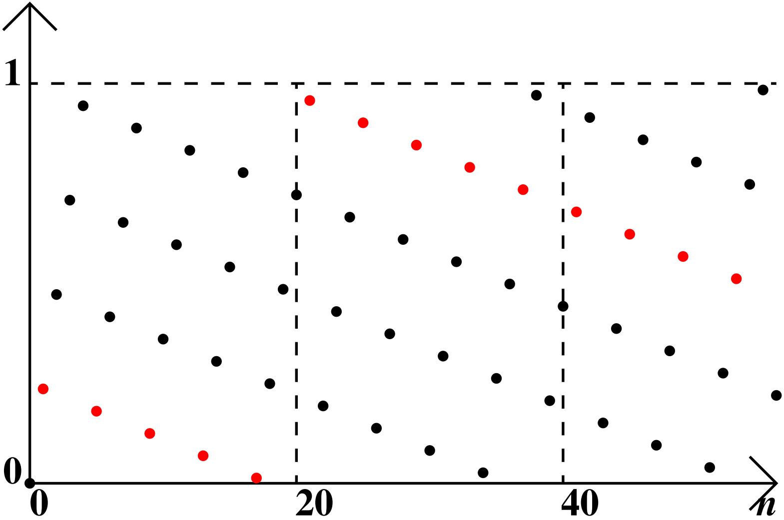
nx の小数部分 ($x = 9/4$)



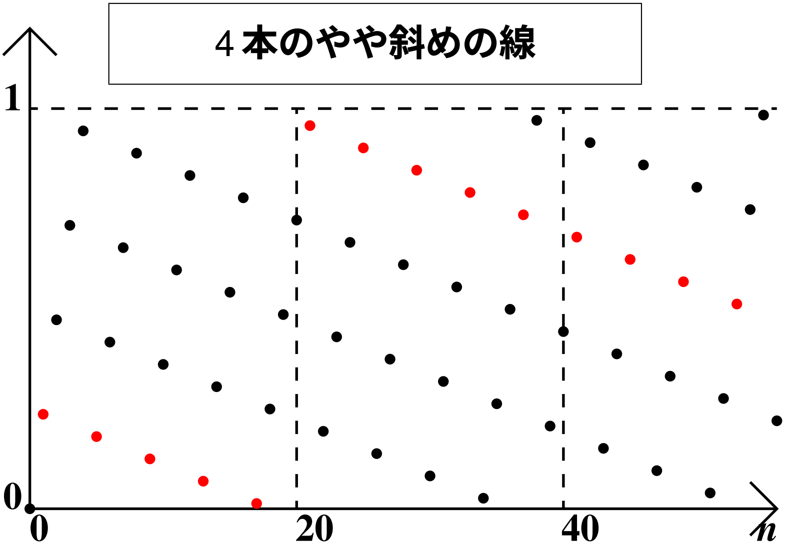
nx の小数部分 ($x = \sqrt{5}$)



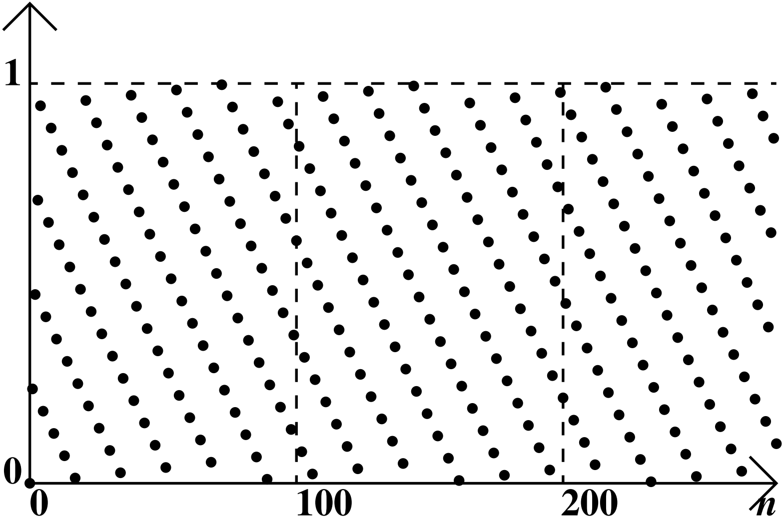
$\sqrt{5} \doteqdot 9/4$



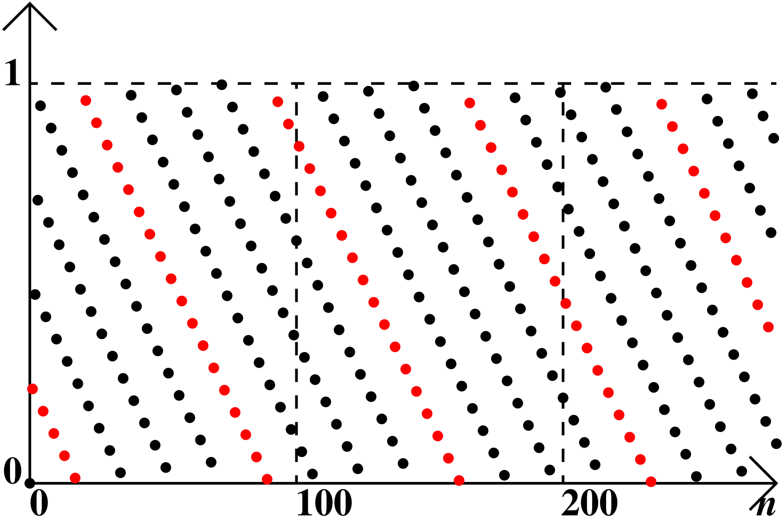
$\sqrt{5} \fallingdotseq 9/4$



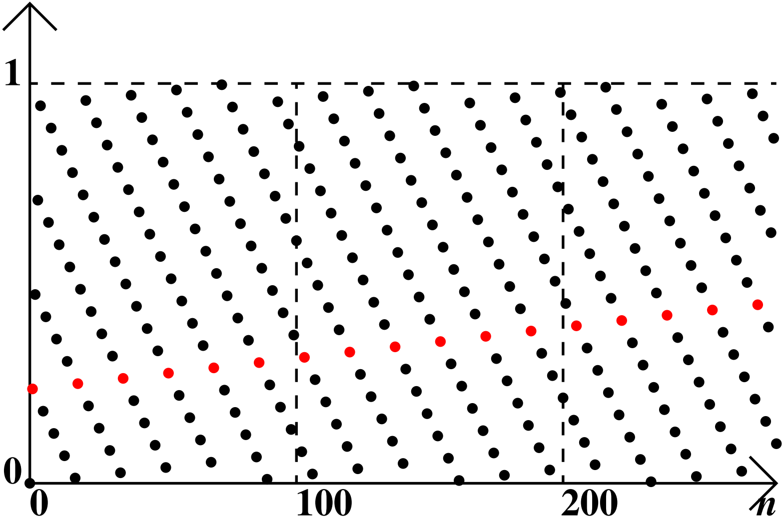
nx の小数部分 ($x = \sqrt{5}$)



$\sqrt{5} \fallingdotseq 9/4$?



$\sqrt{5} \fallingdotseq 38/17$



$\sqrt{5}$ の連分数を使った近似

$$\sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \ldots] = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}$$

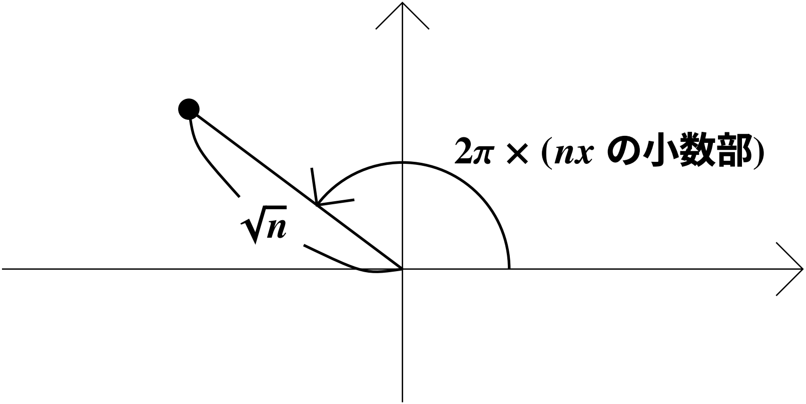
$$\frac{p_1}{q_1} = [2, 4] = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = [2, 4, 4] = 2 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{4}} = \frac{38}{17}$$

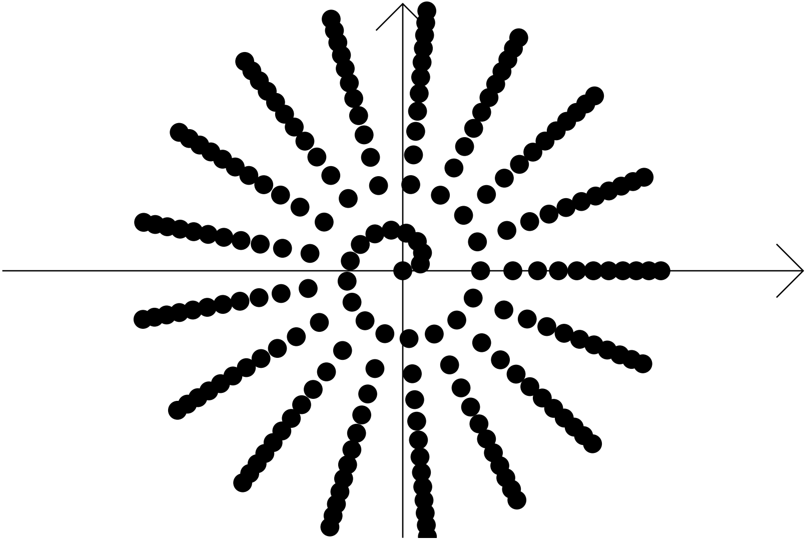
$$\frac{p_3}{q_3} = [2, 4, 4, 4] = 2 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{4 + 1/4}} = \frac{161}{72}$$

極形式による図示

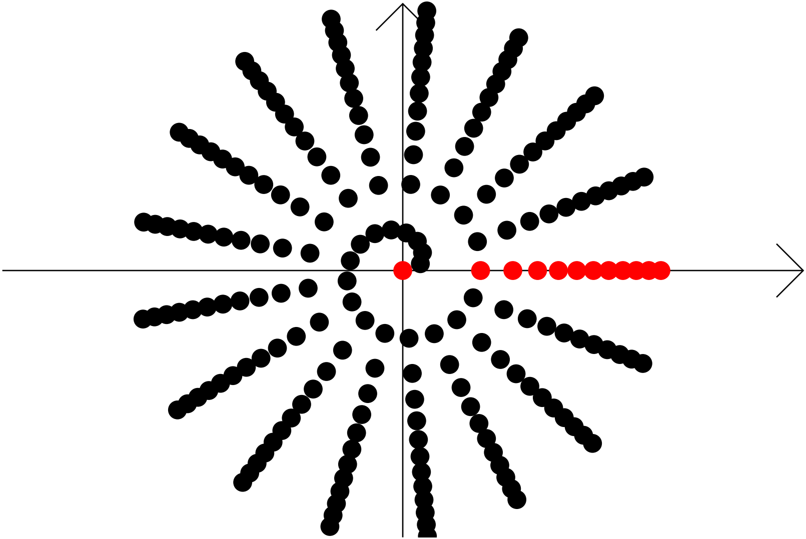
原点からの距離が $\sqrt{n}$, 偏角が $2\pi \times nx$ となる位置に点を打っていく。



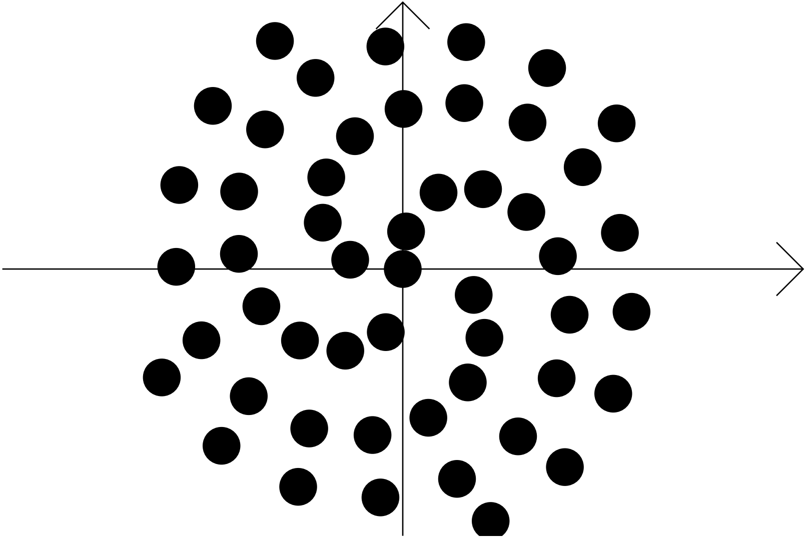
$x = 1/17, \quad n \leq 200$



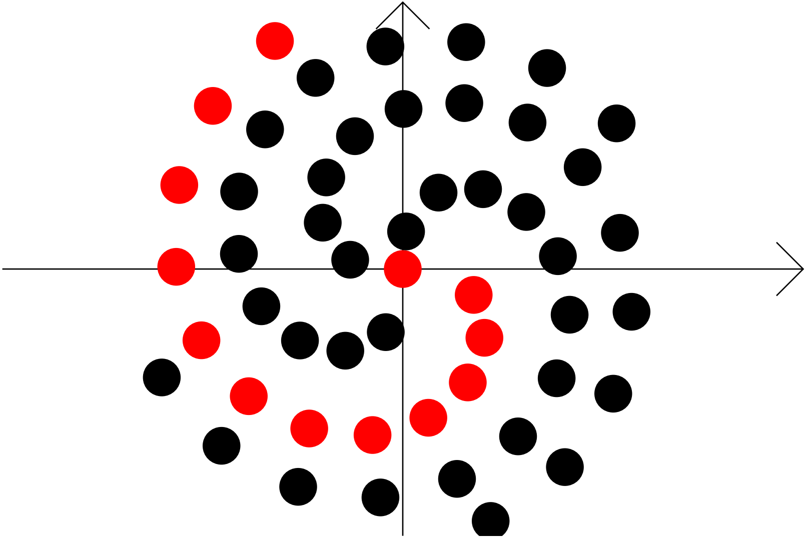
17 本の直線



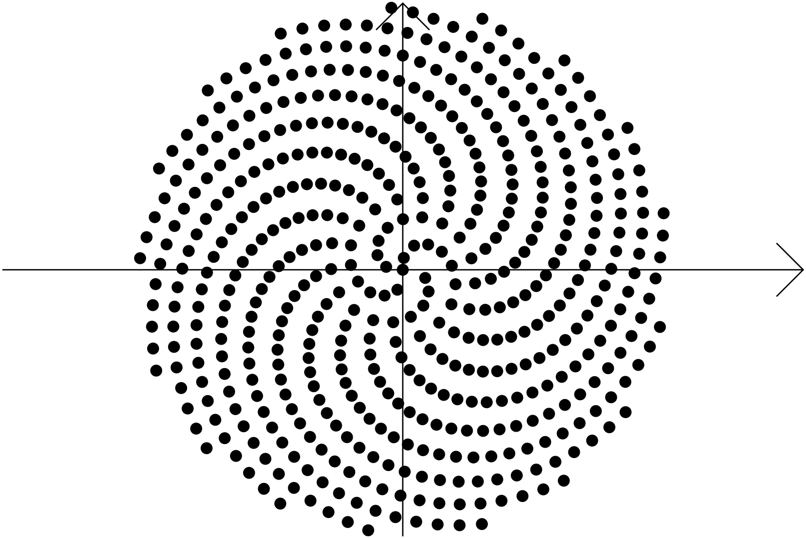
$$x = \sqrt{5}, \quad n \leq 50$$



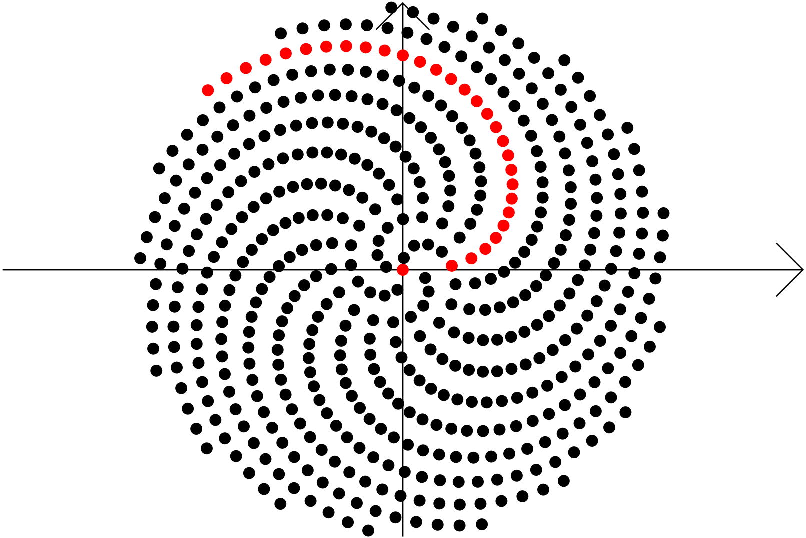
$$x = \sqrt{5} \doteqdot 9/4$$



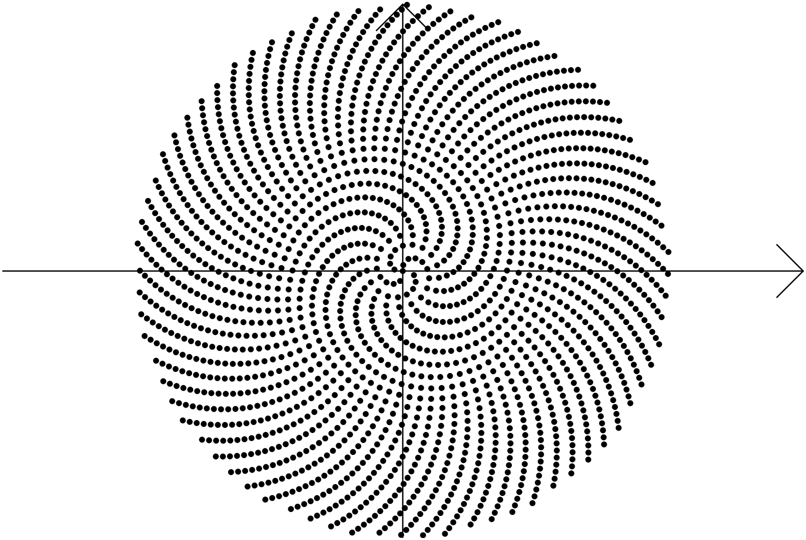
$$x = \sqrt{5}, \quad n \leq 500$$



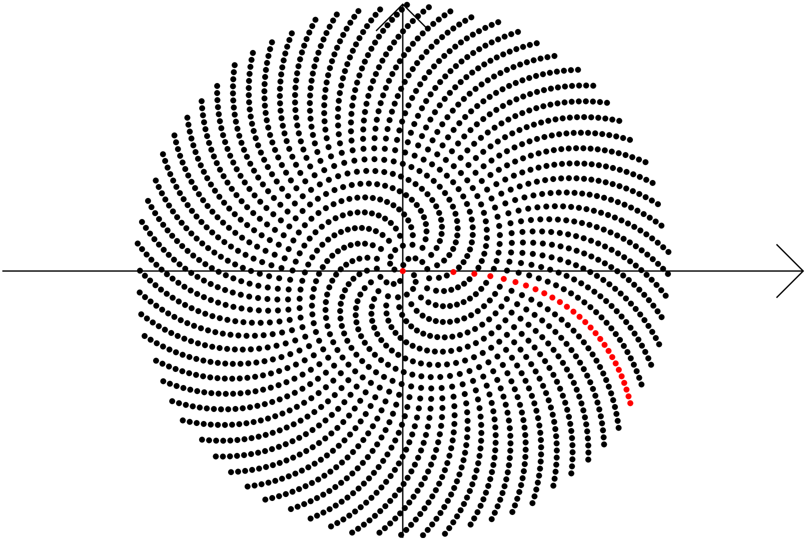
$$x = \sqrt{5} \doteqdot 38/17$$



$x = \sqrt{5}, \quad n \le 2000$



$x = \sqrt{5} \doteq 161/72$



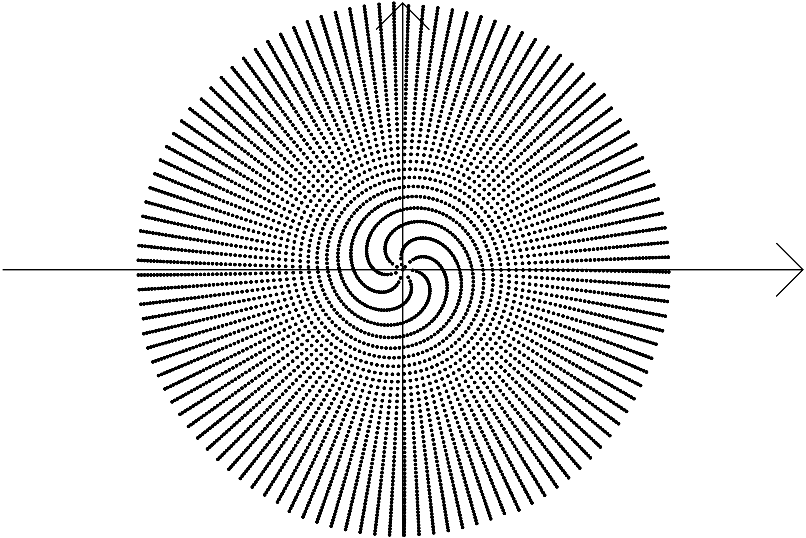
点の分布

もし nx の小数部分に規則性が全くないなら、N 個の点は半径 $\sqrt{N}$ の円内に均等に散らばるはず。

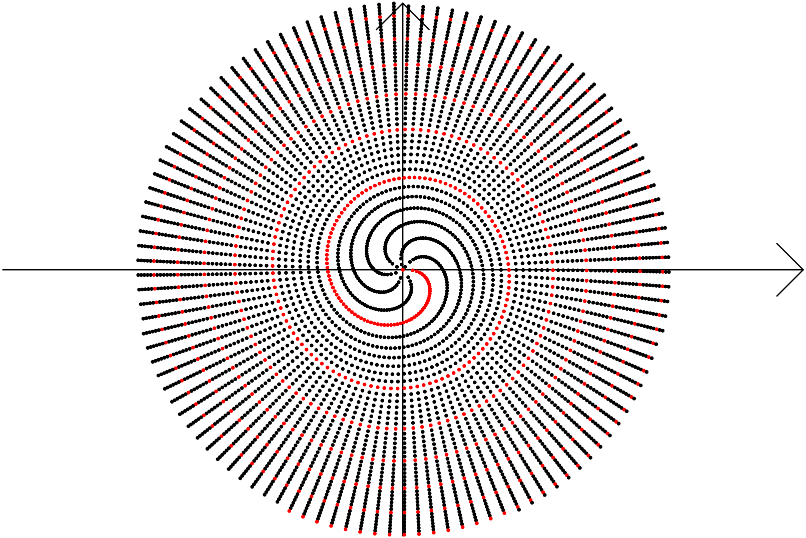
x が有理数のときは、その分母の数だけ放射状の直線ができる。

x が有理数 p/q で近似されるときには、q 本の「腕」が見える。

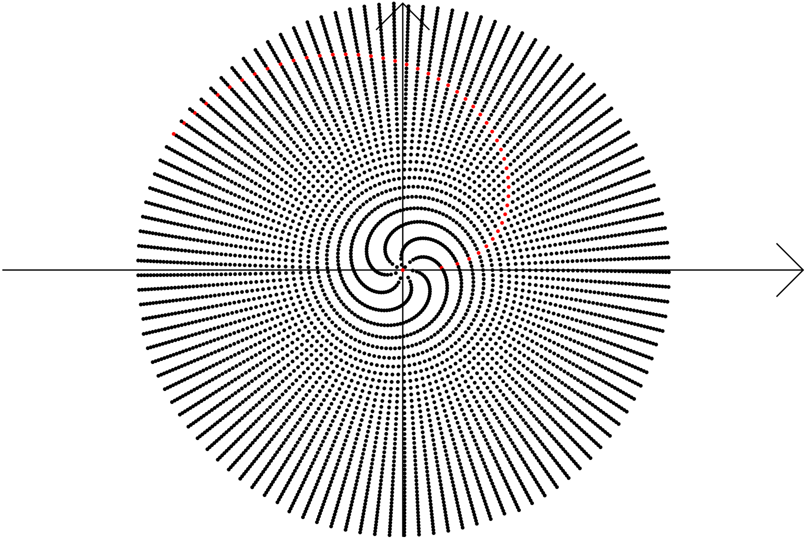
$x = \pi, \quad n \leq 5000$



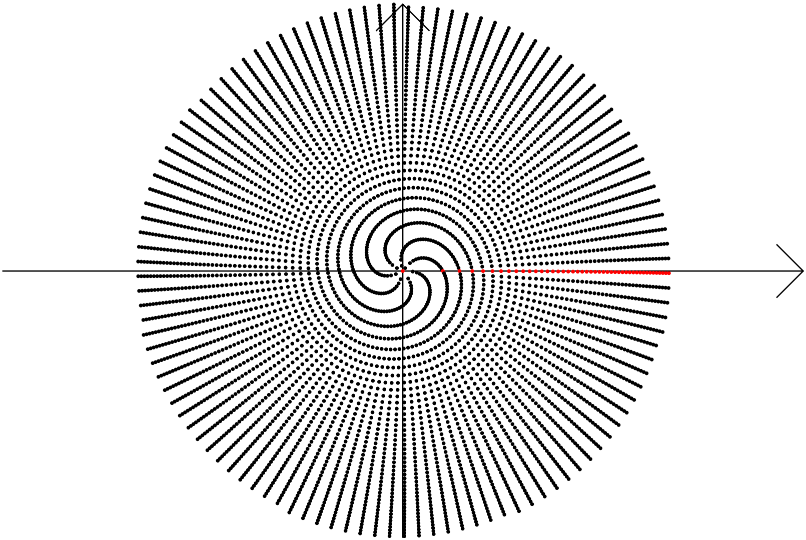
$\pi \doteqdot 22/7$



$\pi \fallingdotseq 333/106$



$\pi \fallingdotseq 355/113$



π の連分数を使った近似

$$\begin{aligned}\pi &= [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots] \\ &= [3, 7, 15, 1, 292, \ldots]\end{aligned}$$

$$\frac{p_0}{q_0} = 3, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}$$

a_{n+1} が大きな数のとき、q_n 本の腕がはっきり見える

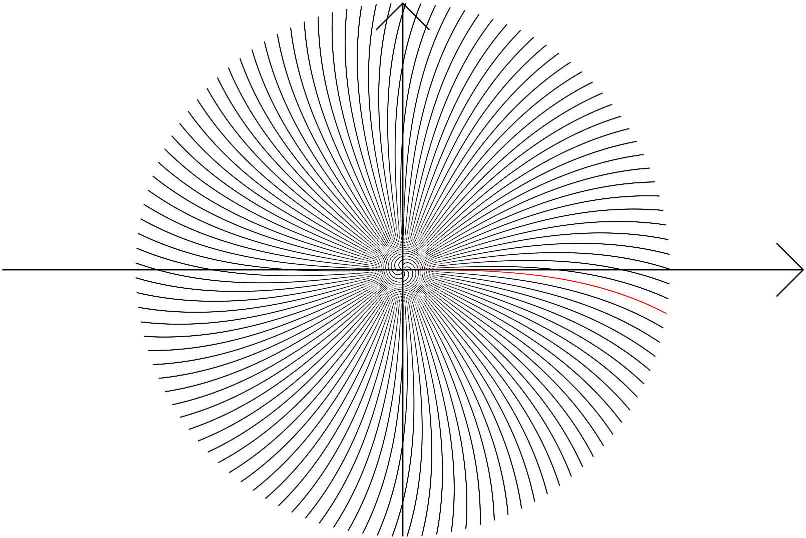
π の連分数を使った近似

近似の誤差

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

a_{n+1} が大きいほど、(分母 q_n の大きさと比べて)
誤差が小さい、よい近似である。

$x = \pi, \quad n \leq 100000$



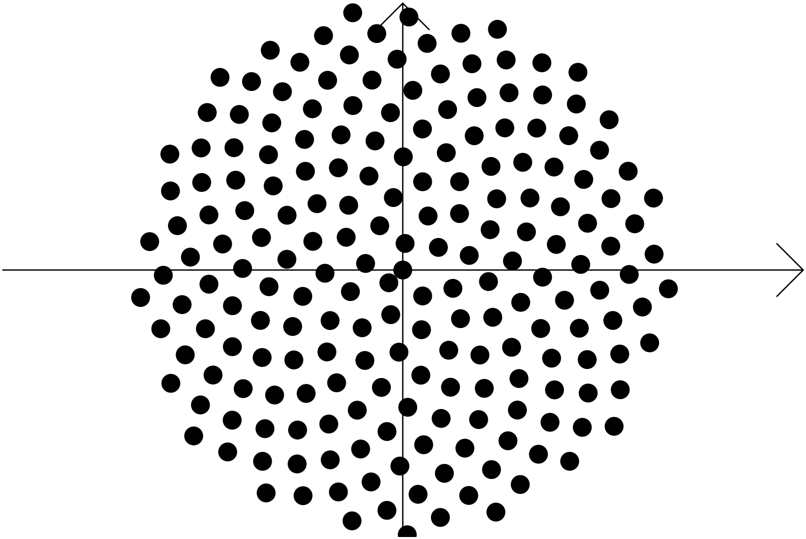
黄金比

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1,1,1,1,\ldots] = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

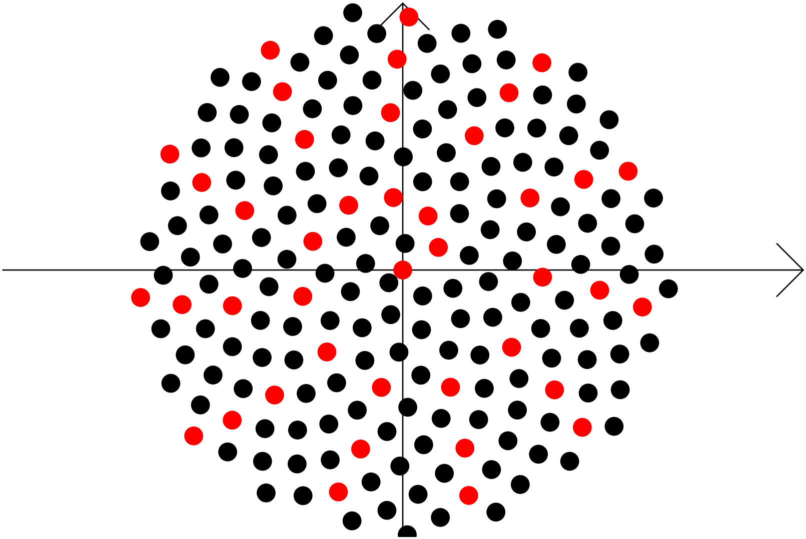
$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{1}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{3}{2}, \quad \frac{p_4}{q_4} = \frac{5}{3},$$
$$\frac{p_5}{q_5} = \frac{8}{5}, \quad \frac{p_6}{q_6} = \frac{13}{8}, \ldots$$

黄金比の有理数近似の効率は悪い。

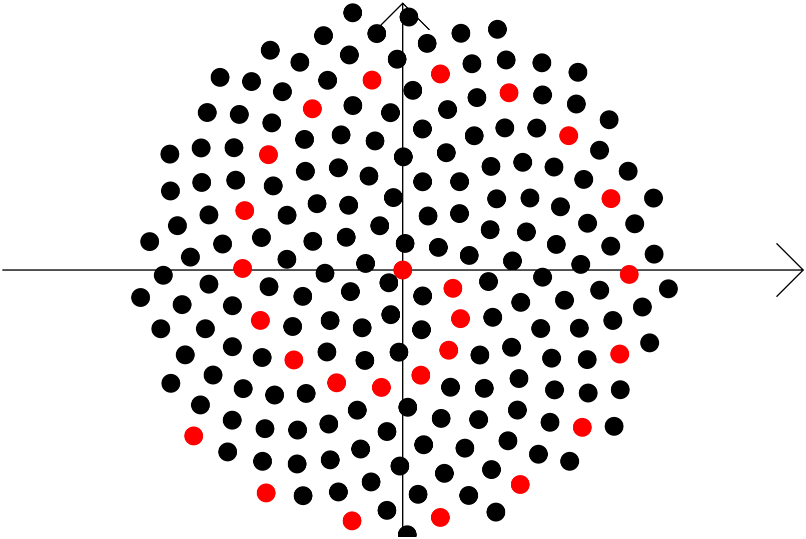
黄金比,　$n \leq 200$



黄金比,　$n \leq 200$



黄金比,　$n \le 200$



黄金比,　$n \leq 200$